



Quand la trigonométrie saute aux yeux

Karim Zayana, Victor Rabiet

► To cite this version:

| Karim Zayana, Victor Rabiet. Quand la trigonométrie saute aux yeux. 2021. hal-03225107

HAL Id: hal-03225107

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03225107>

Submitted on 12 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

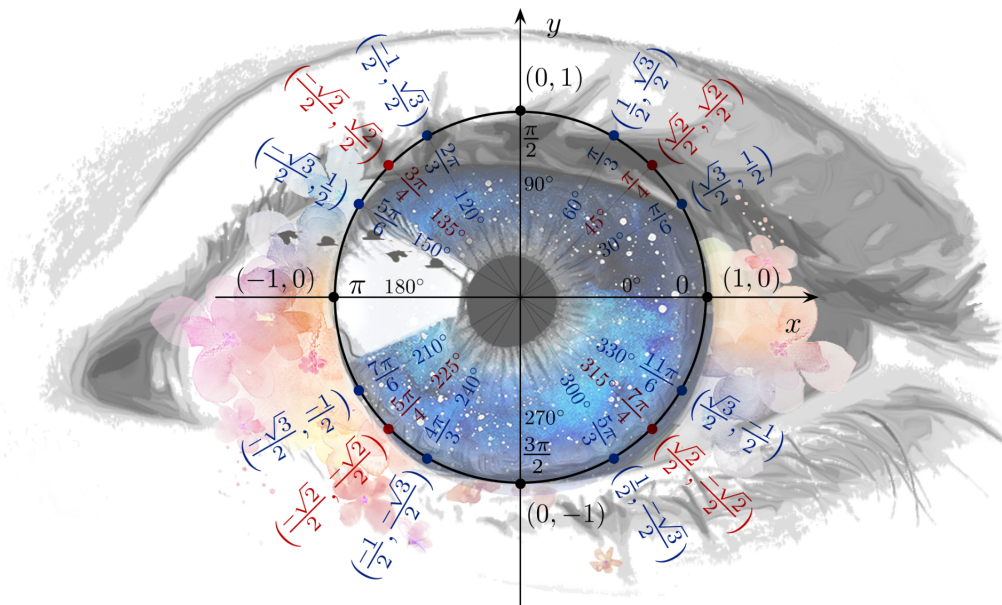
Quand la trigonométrie saute aux yeux

Karim ZAYANA^{1,2} et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



Les formules de la trigonométrie classique sont enseignées, à des degrés d'approfondissement divers, dans les classes de Première et Terminale des lycées [7, 6, 9, 8]. Les programmes les y introduisent par l'intermédiaire des nombres complexes et du produit scalaire. Cependant, les premières constructions de $\mathbb{C}$ remontent au XVI^e siècle quand le calcul vectoriel ne prit, lui, véritablement son essor qu'au XIX^e [2]. Les Anciens ne disposaient donc pas de tels outils. Pourtant, les Grecs témoignaient déjà d'une maîtrise avancée de la géométrie du cercle et de celle du triangle. En attestent les travaux de Ptolémée¹ au II^e siècle, repris dans l'Antiquité tardive en Inde, traduits et diffusés plus tard par les Arabes avant d'être réimportés en Occident au Moyen-Âge [3, 5]. Certes, les

1. Claude PTOLÉMÉE ; savant grec originaire d'Égypte, II^e siècle.

énoncés n'avaient pas l'aspect moderne que nous leur connaissons aujourd'hui : à l'époque, on raisonnait sur des cordes sous-tendues par des arcs, plutôt qu'avec des sinus et cosinus, qui n'en sont jamais que les projetés. Mais les propriétés obtenues revenaient strictement au même [1].

Voyons donc comment, avec les moyens élémentaires d'il y a 2 000 ans re-transcrits dans notre langage, on a pu établir que, par exemple :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \quad (1)$$

ou, tout à fait directement que

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1.$$

Féconde, la formule (1) détermine ensuite, grâce aux déphasages ad-hoc, les développements de $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ et donc, à l'aide de sommes et différences appropriées, les linéarisation des produits $\cos(\alpha) \cos(\beta)$, $\cos(\alpha) \sin(\beta)$ et $\sin(\alpha) \sin(\beta)$. Soit toute la panoplie des relations d'additions/soustractions, aussi dites de « prosthaphaeresis » : le préfixe, construit sur la « prothèse », signe une augmentation ; le suffixe, construit sur l'« aphérèse » signe une diminution.

Le regard pythagoricien

La première méthode que nous envisageons pour démontrer (1) repose sur une application répétée du théorème de Pythagore² (VI^e siècle avant notre ère) [10]

ABC est un triangle quelconque (acutangle sur la Figure, pour simplifier). Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 && \text{(théorème de Pythagore)} \\ &= (\overline{AC} - \overline{HC})^2 + HB^2 \\ &= (AC - CB \cos \gamma)^2 + (CB \sin \gamma)^2 && \text{(orientation telle que } \overline{AC} > 0) \\ &= AC^2 + CB^2 \underbrace{(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma)}_{=1 \text{ (Pythagore)}} - 2AC \cdot CB \cos \gamma \\ &= AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

2. École de PYTHAGORE ; communauté de penseurs du VI^e siècle avant J.-C.

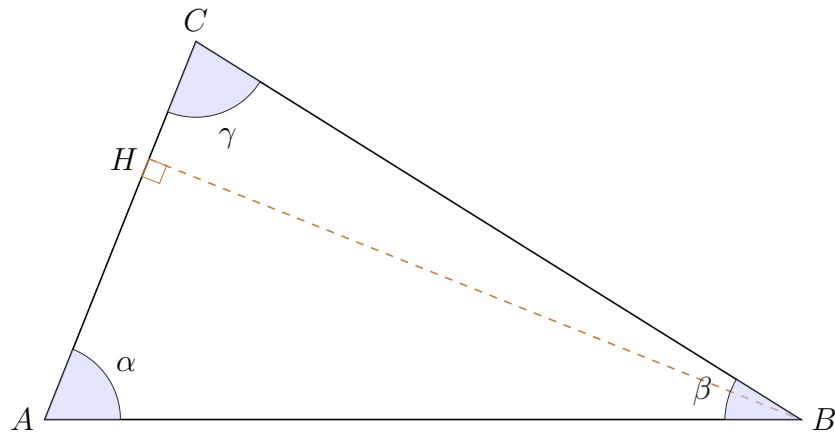


FIGURE 1 – Un premier calcul de AB^2 pour obtenir la formule d'Al Kashi.

ce qui constitue la formule nommée, *a posteriori*, en mémoire du mathématicien perse Al Kashi³.

Longueur algébrique/orientée/signée

Ci-avant, les mesures utilisées sont d'abord algébriques, symbolisées par une barre qui les surmonte ; en effet, le point H aurait pu, en toute généralité, se trouver à l'extérieur du segment $[AC]$. À partir de la 3^e ligne de calcul, une fois l'orientation fixée (ici $\overline{AC} > 0$), les fonctions trigonométriques prennent les signes à leur charge : par exemple

$$\overline{HC} = CB \cos \gamma$$

ou CB est une longueur usuelle (positive!).

Projetons maintenant C sur (BC) et recalculons AB^2 :

3. AL KASHI : astronome et mathématicien du XIV^e siècle, natif de l'actuelle Iran.

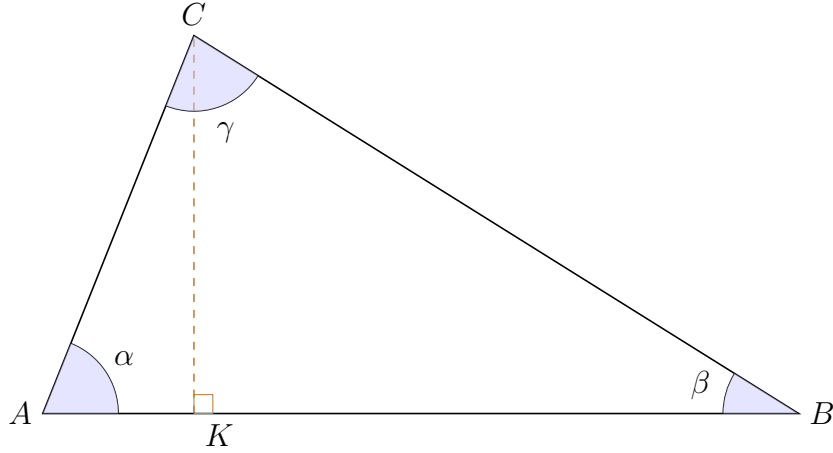


FIGURE 2 – Un deuxième calcul de AB^2 qui, combiné au premier, fournit le développement de $\cos(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (AK + KB)^2 \\
 &= \underbrace{AK^2}_{\substack{AC^2 - CK^2 \\ \text{(Pythagore)}}} + \underbrace{KB^2}_{\substack{BC^2 - CK^2 \\ \text{(Pythagore)}}} + 2AK \cdot KB \\
 &= AC^2 + CB^2 - 2 \underbrace{CK \cdot CK}_{AC \sin \alpha \cdot BC \sin \beta} + 2 \underbrace{AK \cdot KB}_{AC \cos \alpha \cdot BC \cos \beta} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Soit, en confrontant les deux expressions (2) et (3),

$$-\cos \gamma = -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

Or $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, d'où

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Le point de vue projectif

La deuxième méthode que nous exposons empile astucieusement deux triangles dans le cercle trigonométrique tout en enchaînant les projections [4]. Elle

figura dans les manuels scolaires français jusque dans les années 1990, avant d'en disparaître assez mystérieusement. En voici l'illustration dans une configuration particulière mais à nouveau générique.

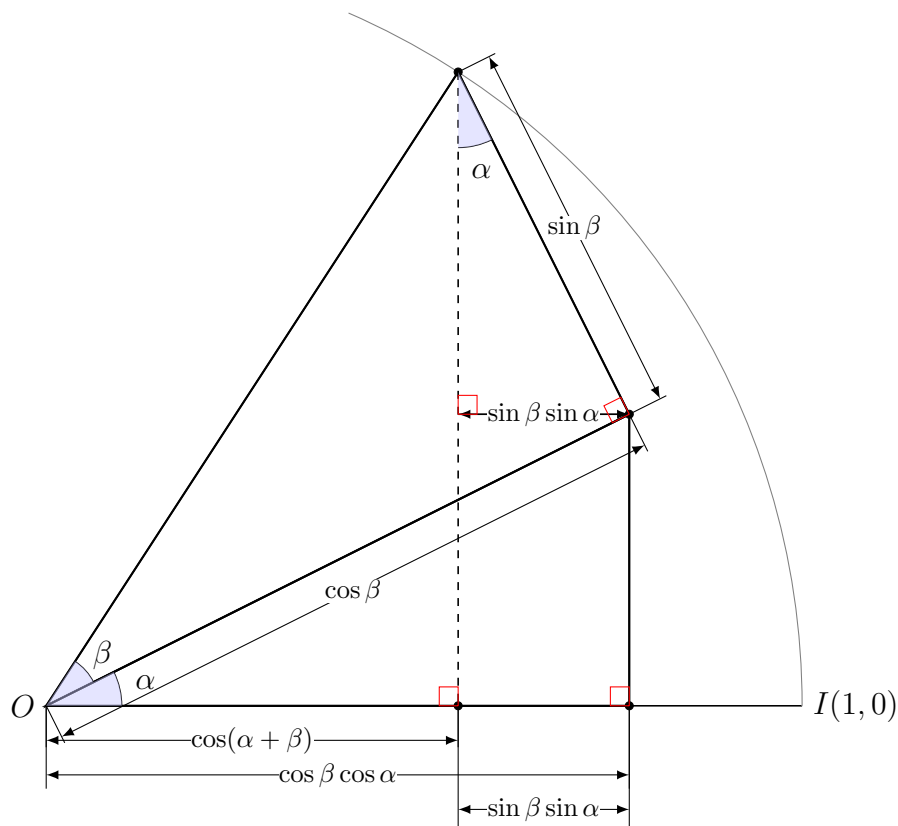


FIGURE 3 – Calcul direct de $\cos(\alpha + \beta)$.

Ainsi, là encore

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Cas d'école : la formule de duplication

Bien entendu, les formules de duplication et de division découlent des formules d'additions. Mais il y a plus rapide, comme sur ce dessin où l'on inscrit un triangle

rectangle dans un demi-cercle unité :

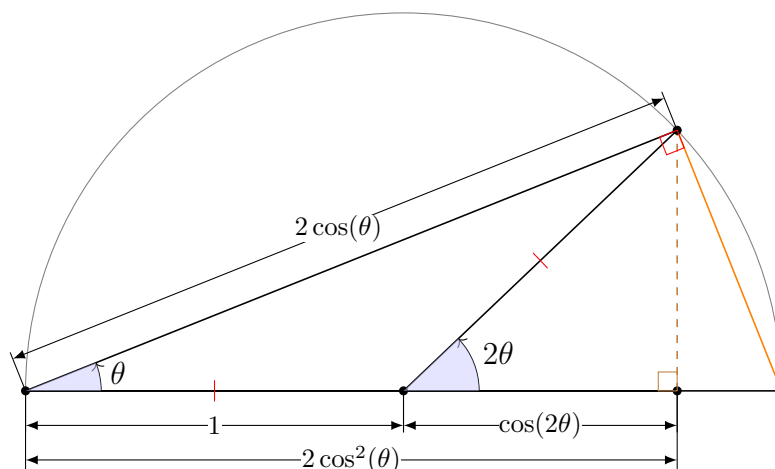


FIGURE 4 – Calcul direct de $\cos(2\theta)$.

Les formules de déphasage (en opposition ou en quadrature) se déduiraient également des formules d'additions. Mieux, la mise en évidence de quelques axes ou centre de symétrie du cercle trigonométrique nous convaincra immédiatement de ce que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

ou

$$\cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Références

- [1] Carl BOYER. *A history of mathematics*. Princeton Paperbacks, 1968.
- [2] Amy DAHAN-DALMEDICO et Jeanne PEIFFER. *Une histoire des mathématiques*. Éditions du Seuil, 1986.
- [3] James GOW. *Greek Mathematics*. Cambridge, 1884.
- [4] Ernst HAIRER et Gerhard WANNER. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [5] Bertrand HAUCHECORNE. *Les Mots & les Maths*. Ellipses, 2003.

- [6] « Programme d'enseignement de mathématiques et physique-chimie de spécialité de la classe de première de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901591A.htm>.
- [7] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.
- [8] « Programme de l'enseignement de mathématiques et physique-chimie de spécialité de la classe terminale de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921261A.htm>.
- [9] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes de la classe terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921264A.htm>.
- [10] Karim ZAYANA. « Pythagore, J'adore ». In : *Repères IREM* (2020).