

**$f'g + fg'$  ou  $f'g - fg'$ ?**

Karim Zayana, Victor Rabiet, Ivan Boyer

► **To cite this version:**

Karim Zayana, Victor Rabiet, Ivan Boyer.  $f'g + fg'$  ou  $f'g - fg'$ ?. CultureMath, ENS, 2021.  
hal-03225120

**HAL Id: hal-03225120**

**<https://hal.telecom-paris.fr/hal-03225120>**

Submitted on 12 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# $f'g + g'f$ ou $f'g - g'f$ ?

Karim ZAYANA<sup>1,2</sup>, Victor RABIET<sup>1,3</sup> et Ivan BOYER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ministère de l'Éducation nationale, Paris

<sup>2</sup> LTCL, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

<sup>3</sup> DMA, École normale supérieure, Paris

Que d'élégance dans les mathématiques [2]. Songez donc : la dérivée d'une somme devient une somme de dérivées ; la dérivée d'une composée, un produit de dérivées ; la dérivée d'une réciproque, l'inverse d'une dérivée [1]. À jouer sur les notations et la polysémie des lois, on obtient même des formules troublantes de concision, les deux dernières se résumant à :

$$(f \circ g)'(x) = f'_{(g(x))} \bullet g'(x)$$

et

$$(f^{-1})'(x) = (f'_{(f^{-1}(x))})^{-1}$$

Les règles se font moins intuitives sur la dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient – toutes au programme de la spécialité de Première [3]. *Non* la dérivée d'un produit n'est pas un produit de dérivées ; pas plus une composée (au nom d'une pseudo dualité). *Non*, la dérivée d'un inverse n'est pas l'inverse d'une dérivée ; pas davantage une réciproque. Dès lors, on apprendra par cœur que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (1)$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g'(x))^2} \quad (2)$$

ainsi que leurs démonstrations. Par cœur, vraiment ? Quand un dessin rend compte de la relation (1) ? Qu'un autre éclaire la (2), dont le curieux signe « - » qui la distingue de (1) ?

Pour établir de façon heuristique la formule (1), on assimile  $fg(x) = f(x)g(x)$  à l'aire algébrique d'un rectangle de côtés (signés)  $f(x)$  et  $g(x)$ . Si bien que

$$\begin{aligned} d(fg)(x) &= fg(x + dx) - fg(x) \\ &= f(x + dx)g(x + dx) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

apparaît comme une différence d'aires, ce qu'illustre le schéma ci-dessous.

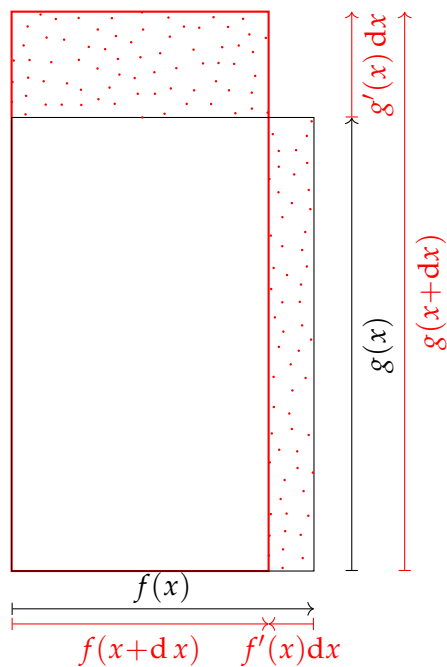


FIGURE 1 – Le secret de la dérivée de  $f \times g$ .

Naturellement, les parties communes se compensent ; ne subsistent que deux franges, mouchetées sur le graphique. En atteste d'ailleurs le calcul, limité aux approximations affines

$$\begin{aligned} d(fg)(x) &= f(x+dx)(g(x)+g'(x)dx) - (f(x+dx)-f'(x)dx)g(x) \\ &= \cancel{f(x+dx)g(x)} + f(x+dx)g'(x)dx - \cancel{f(x+dx)g(x)} + f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Dans le même esprit, en tronquant  $f(x+dx)g'(x)dx = f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2$  au premier ordre, il vient

$$d(fg)(x) = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) dx$$

qui justifie (1).

Pour expliquer de manière imagée la formule (2), on interprète le quotient

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  comme la pente du vecteur  $(g(x); f(x))$ . Si bien que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f}{g}(x + dx) - \frac{f}{g}(x) \\ &= \frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} - \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

compare deux pentes. Or la pente de  $(g(x); f(x))$  tend à croître (resp. décroître) quand le vecteur  $(g(x); f(x))$  tend à tourner dans le sens direct (resp. rétrograde). C'est-à-dire quand le vecteur déplacement infinitésimal  $d(g(x); f(x))$ , linéarisé en  $(g'(x)dx; f'(x)dx)$ , pousse  $(g(x); f(x))$  dans le sens trigonométrique. Une propriété que caractérise la positivité du déterminant

$$\begin{vmatrix} g(x) & g'(x)dx \\ f(x) & f'(x)dx \end{vmatrix} = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) dx.$$

Aussi  $d\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  et  $(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) dx$  sont-ils de même signe, et par conséquent  $\frac{d(f/g)}{dx}(x)$  et  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$  aussi. Voilà qui corrobore (2) et que récapitule le croquis ci-après :

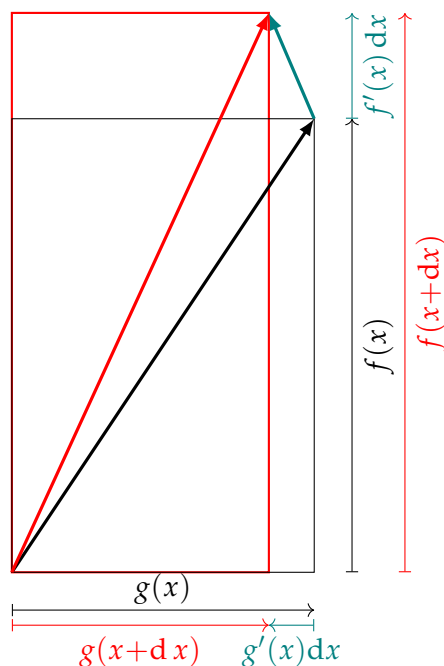


FIGURE 2 – Le secret de la dérivée de  $\frac{f}{g}$ .

## Références

- [1] Henri CARTAN. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 1977.
- [2] Clifford PICKOVER. *Le beau livre des maths*. T. 1. Dunod, 2019.
- [3] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.