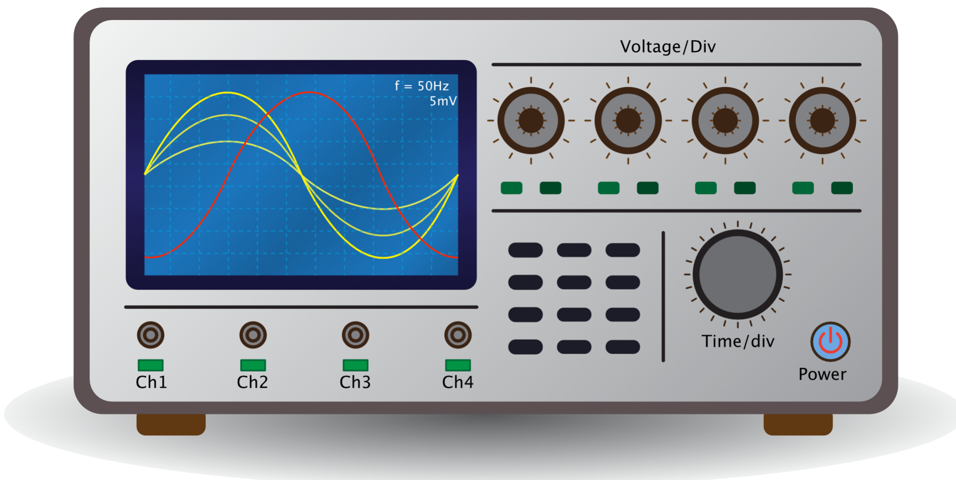
En phase et quadrature

Karim Zayana, Victor Rabiet

En phase et quadrature

Karim Zayana[1,2] et Victor Rabiet[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



En évoquant la transformation d'une somme trigonométrique de la forme $a\cos(\theta) - b\sin(\theta)$ en une quantité du type $R\cos(\theta + \varphi)$, le programme de Terminale STI2D-PCM [1] touche aux mathématiques autant qu'aux sciences physiques.

Dès lors, en mathématiques, on s'intéressera par exemple aux équations d'inconnue θ,

$$a\cos(\theta) - b\sin(\theta) = c.$$

Le cas particulier où $c = 0$, qui mène directement à $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$, pourra d'ailleurs justifier *a posteriori* qu'une tangente inverse participe à la solution générale.

En sciences physiques, dans le domaine « ondes et signaux », on verra que superposer deux impulsions sinusoïdales en quadrature de phase en produit une troisième, simplement déphasée. Aussi la somme de Fourier

$$\sum_k a_k \cos(k\omega t) - b_k \sin(k\omega t)$$

d'un signal périodique se condense-t-elle en cette autre décomposition :

$$\sum_k R_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Pour réaliser la transformation voulue de l'expression donnée, on en force classiquement la factorisation par le terme $\sqrt{a^2+b^2}$, puis on traduit les fractions $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en tant que lignes trigonométriques d'un même angle. Un tantinet artificielle, l'opération cache des arguments pourtant plus naturels. À la manière de Frénet [1], interprétons plutôt $a\cos(\theta)$ comme le projeté horizontal du vecteur unitaire $\vec{e_r}$ d'angle polaire θ qu'on aura pondéré du coefficient a, et $-b\sin(\theta)$ comme celui de son voisin $\vec{e_\theta}$, d'angle polaire $\theta + \pi/2 = \theta + \frac{2\pi}{\mathbf{4}}$ (d'où la **qua**drature de phase), qu'on aura pondéré du coefficient b. De la sorte, $a\cos(\theta) - b\sin(\theta)$ résulte de la projection horizontale de $a\vec{e_r} + b\vec{e_\theta}$. Le schéma ci-dessous expose cette construction. Sa portée demeure quand bien même l'un des facteurs a ou b ne serait pas positif.

De norme $R = \sqrt{a^2+b^2}$, le vecteur $a\vec{e_r} + b\vec{e_\theta}$ aura été dévié de l'angle $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$ par rapport au vecteur $a\vec{e_r}$, lequel s'incline de θ si $a > 0$ et de $\theta + \pi$ sinon. Si bien que

$$a\cos(\theta) - b\sin(\theta) = \pm R\cos(\theta + \varphi).$$

En électricité, en électromagnétisme, en acoustique, etc. on aura volontiers $\theta = \theta(t) = \omega t$. Il faut donc s'imaginer le repère $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ tournant à la vitesse angulaire uniforme ω.

Tout ce qui précède s'adapte à l'expression voisine, $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ en changeant b en $-b$. La branche portée par $\vec{e_\theta}$ s'en trouve réfléchie par rapport à $\vec{e_r}$. Le module R demeure inchangé tandis que φ devient son opposé.

Références

[1] « Programme de l'enseignement de mathématiques et physique-chimie de spécialité de la classe terminale de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921261A.htm`.

1. Jean-Frédéric FRÉNET ; mathématicien, astronome et météorologue français, 1816 – 1900.

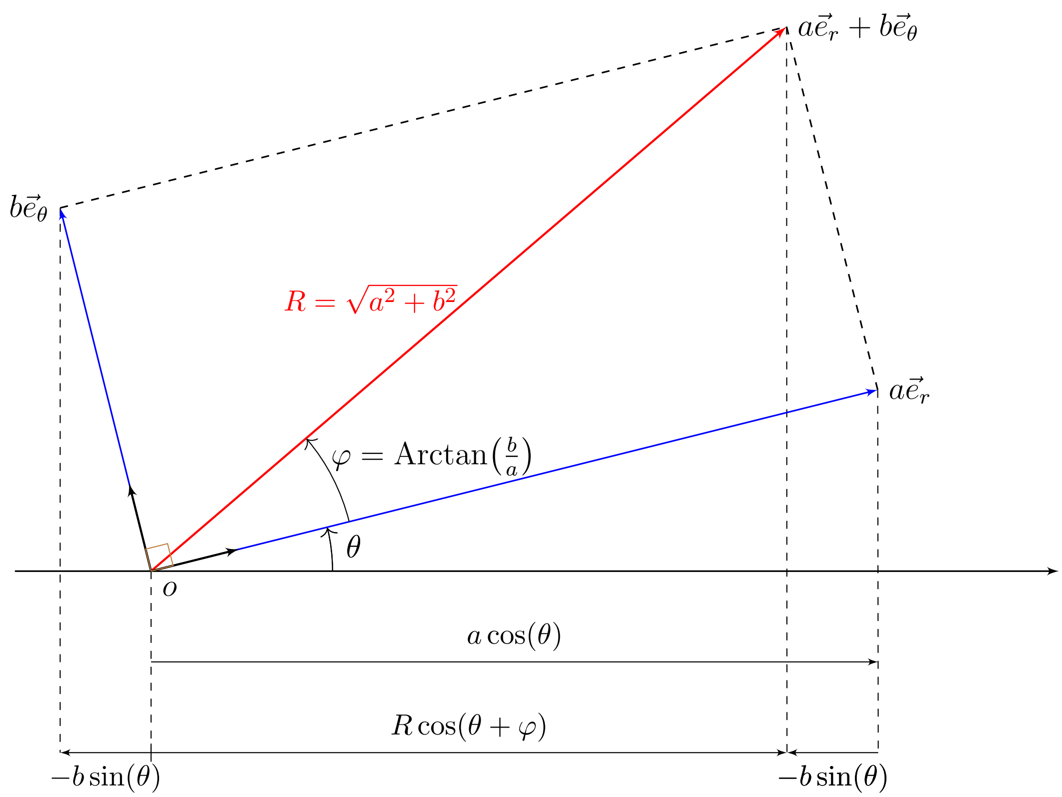


FIGURE 1 – Les dessous de la transformations de l'expression $a\cos(\theta) - b\sin(\theta)$ en l'expression $R\cos(\theta+\varphi)$.