



HAL
open science

En phase et quadrature

Karim Zayana, Victor Rabiet

► **To cite this version:**

| Karim Zayana, Victor Rabiet. En phase et quadrature. CultureMath, 2021. hal-03238232v1

HAL Id: hal-03238232

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03238232v1>

Submitted on 27 May 2021 (v1), last revised 8 Jul 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

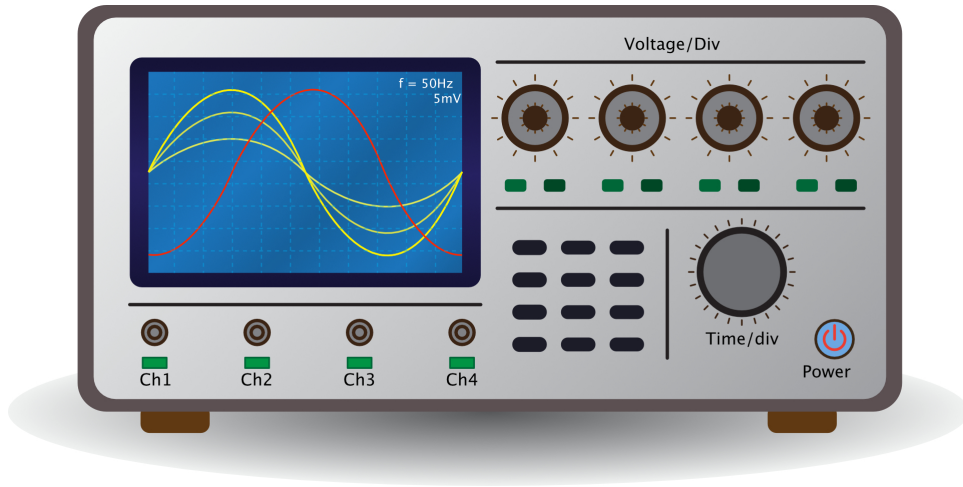
En phase et quadrature

Karim ZAYANA^{1,2} et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



En évoquant la transformation d'une somme trigonométrique de la forme $a \cos(\theta) - b \sin(\theta)$ en une quantité du type $R \cos(\theta + \varphi)$, le programme de Terminale STI2D-PCM [1] touche aux mathématiques autant qu'aux sciences physiques.

Dès lors, en mathématiques, on s'intéressera par exemple aux équations d'inconnue θ ,

$$a \cos(\theta) - b \sin(\theta) = c.$$

Le cas particulier où $c = 0$, qui mène directement à $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$, pourra d'ailleurs justifier *a posteriori* qu'une tangente inverse participe à la solution générale.

En sciences physiques, dans le domaine « ondes et signaux », on verra que superposer deux impulsions sinusoïdales en quadrature de phase en produit une troisième, simplement déphasée. Aussi la somme de Fourier

$$\sum_k a_k \cos(k\omega t) - b_k \sin(k\omega t)$$

d'un signal périodique se condense-t-elle en cette autre décomposition :

$$\sum_k R_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Pour réaliser la transformation voulue de l'expression donnée, on en force classiquement la factorisation par le terme $\sqrt{a^2 + b^2}$, puis on traduit les fractions $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en tant que lignes trigonométriques d'un même angle. Un tantinet artificielle, l'opération cache des arguments pourtant plus naturels. À la manière de Frénet¹, interprétons plutôt $a \cos(\theta)$ comme le projeté horizontal du vecteur unitaire \vec{e}_r d'angle polaire θ qu'on aura pondéré du coefficient a , et $-b \sin(\theta)$ comme celui de son voisin \vec{e}_θ , d'angle polaire $\theta + \pi/2 = \theta + \frac{2\pi}{4}$ (d'où la **quadrature** de phase), qu'on aura pondéré du coefficient b . De la sorte, $a \cos(\theta) - b \sin(\theta)$ résulte de la projection horizontale de $a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta$. Le schéma ci-dessous expose cette construction. Sa portée demeure quand bien même l'un des facteurs a ou b ne serait pas positif.

De norme $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, le vecteur $a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta$ aura été dévié de l'angle $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$ par rapport au vecteur $a\vec{e}_r$, lequel s'incline de θ si $a > 0$ et de $\theta + \pi$ sinon. Si bien que

$$a \cos(\theta) - b \sin(\theta) = \pm R \cos(\theta + \varphi).$$

En électricité, en électromagnétisme, en acoustique, etc. on aura volontiers $\theta = \theta(t) = \omega t$. Il faut donc s'imaginer le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ tournant à la vitesse angulaire uniforme ω .

Tout ce qui précède s'adapte à l'expression voisine, $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ en changeant b en $-b$. La branche portée par \vec{e}_θ s'en trouve réfléchi par rapport à \vec{e}_r . Le module R demeure inchangé tandis que φ devient son opposé.

Références

- [1] « Programme de l'enseignement de mathématiques et physique-chimie de spécialité de la classe terminale de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special18/MENE1921261A.htm>.

1. Jean-Frédéric FRÉNET ; mathématicien, astronome et météorologue français, 1816 – 1900.

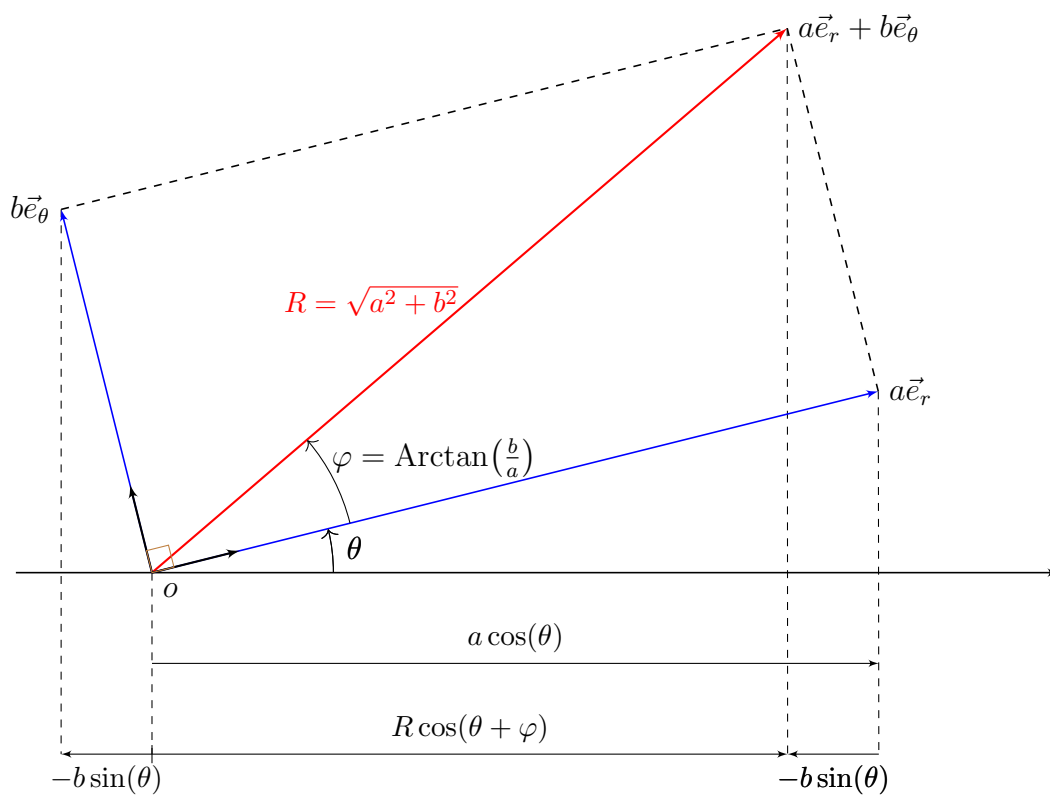


FIGURE 1 – Les dessous de la transformations de l'expression $a \cos(\theta) - b \sin(\theta)$ en l'expression $R \cos(\theta + \varphi)$.