TRANSFORMEES EN ONDELETTES DISCRETES ET CONTINUES: COMPARAISON ET ALGORITHMES RAPIDES

Olivier RIOUL et Pierre DUHAMEL

CNET Centre Paris B (CNET/PAB/RPE)

38-40, rue du Général Leclerc, 92131 Issy-Les-Moulineaux, France

RÉSUMÉ

Résumé. Dans cet article, on développe un formalisme pour l'analyse et la synthèse "par ondelettes" de signaux à temps discret qui se fonde sur des définitions précises des notions d'*échelle* et de *résolution*. On montre les connexions profondes existantes entre les deux approches temps discret et temps continu. On développe ensuite des algorithmes rapides pour le calcul de la transformée en ondelettes aussi bien continues que discrètes.

ABSTRACT

Abstract. A formalism for wavelet analysis and synthesis of discrete-time signals, based on precise definitions of *scale* and *resolution*, is presented in this paper. Strong links exist between the discrete-time and continuous-time approaches. Based on this formalism, we then derive fast algorithms for the computation of wavelet transforms that use either discrete-time or continuous-time wavelets.

1. INTRODUCTION

La théorie mathématique des décompositions de signaux en ondelettes, telle qu'elle a été développée ces dernières années [1-4], est basée sur un modèle de signal analogique; le côté "temps discret" des ondelettes, qui est un cas particulier de bancs de filtres en octaves, est souvent considéré comme un simple outil de calcul des coefficients d'ondelettes [1], voire de construction d'ondelettes continues par un processus de limite [3,4].

On montre dans cet article qu'il est possible de développer à peu de frais une théorie "ondelettes" directement en temps discret, sans l'intermédiaire du temps continu. On se limite aux signaux monodimensionnels, mais les concepts développés s'étendent aisément au cas multi-dimensionnel. Cette théorie se fonde sur une définition précise des notions d'*échelle* et de *resolution* dans le domaine discret. Elle présente la même richesse de structure mathématique (orthogonalité, biorthogonalité, etc.) que la théorie initiale, et le parallélisme est total.

Dans cet article, on insiste sur le formalisme discret présenté dans les sections 2 et 3. La transformée en ondelettes discrètes à laquelle on aboutit à été étudiée par de nombreux auteurs [1-5, 11].

En se basant sur les connexions profondes existantes entre les deux approches temps discret et temps continu, on développe ensuite de nouveaux algorithmes rapides pour le calcul de la transformée en ondelettes aussi bien continues que discrètes.

2. ECHELLE ET RESOLUTION EN TEMPS DISCRET

2.1. Changement d'échelle

La notion d'échelle, pour l'analyse multirésolution, s'inspire naturellement de celle d'échelle de cartes routières. Nous l'appliquons ici à des signaux à temps discret $\{x_n\}$. Ainsi, une version à plus grande échelle de $\{x_n\}$ est un signal similaire à $\{x_n\}$, mais échantillonné à une cadence supérieure. L'échelle étant une notion relative, ce concept se définit au moyens d'opérateurs de changement d'échelle (on se limitera aux changements d'échelle d'un facteur deux par commodité). L'opérateur de doublement d'échelle, noté $\mathbf{G}\uparrow$, est l'équivalent discret d'une dilatation $x(t) \rightarrow x(t/2)$. De même, l'opérateur $\downarrow\mathbf{G}'$ de réduction d'échelle de moitié correspond à $x(t) \rightarrow x(2t)$.

Nous décrirons précisément ces opérateurs à partir des hypothèses suivantes: *(i)* les opérateurs de changement d'échelle sont linéaires. *(ii)* les translations en temps se correspondent aux différentes échelles:

$$\mathbf{G}\uparrow \mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{2k}\,\mathbf{G}\uparrow \quad \text{et} \quad \downarrow\mathbf{G}'\,\mathbf{T}_{2k} = \mathbf{T}_k \downarrow\mathbf{G}',$$

où $\mathbf{T}_k$ est l'opérateur de translation de k échantillons $x_n \rightarrow x_{n-k}$. Il est facile de montrer qu'alors [4]:

$$(\mathbf{G}\uparrow x)_n = \sum_k g_{n-2k}\, x_k \qquad (1a)$$

$$(\downarrow\mathbf{G}' x)_n = \sum_k g'_{2n-k}\, x_k \qquad (1b)$$

où les séquences $\{g_n\}$ et $\{g'_n\}$ paramétrisent les deux opérateurs. L'opérateur $\mathbf{G}\uparrow$ (1a) agit donc comme un doublement de fréquence d'échantillonnage suivi d'un filtrage de réponse impulsionnelle $\{g_n\}$ qui a pour effet d'interpoler la séquence d'entrée $\{x_n\}$. L'opération (1b) est duale: l'entrée est filtrée par $\{g'_n\}$, puis sous-échantillonnée (on élimine les échantillons d'ordre impair). On suppose que les filtres en question sont *passe-bas* afin qu'un changement d'échelle préserve la forme d'onde du signal [5]. On peut déjà constater que ces opérateurs (1) sont les "briques de base" utilisées dans les bancs de filtres tels que celui de la Fig. 1 (a), où l'on reconnait dans la branche du bas l'action successive de $\downarrow\mathbf{G}'$ et de $\mathbf{G}\uparrow$ (la notation en termes d'opérateurs choisie se traduit facilement en graphes de fluence).

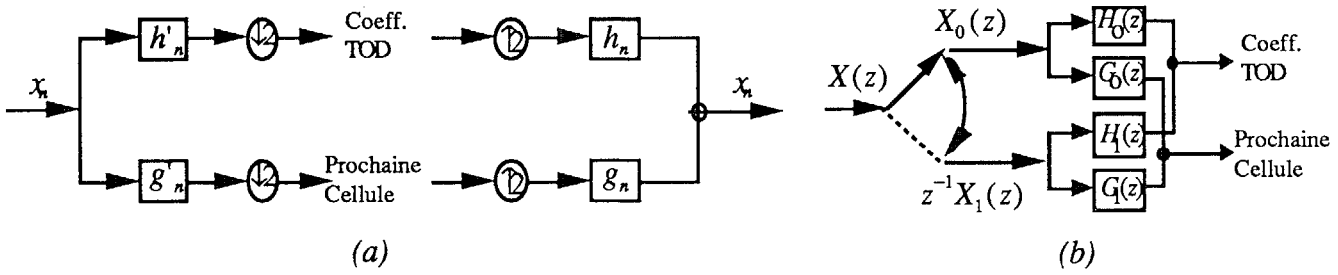


Figure 1. *(a) Banc de filtres à deux bandes avec reconstruction parfaite (analyse et synthèse). La TOD est obtenue en itérant le schéma sur la composante passe-bas (branche du bas). (b) Une réécriture du banc de filtres d'analyse. Les indices 0 et 1 correspondent aux échantillons d'indices pairs et impairs, respectivement.*

En résumé, on construit, à l'aide de (1), en partant d'un signal originel $x=\{x_n\}$ (qui est à l'échelle 1 par convention), ses versions aux différentes échelles 2^j, $j\in\mathbb{Z}$. La différence entre deux signaux comme x et $\mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}'x$, qui sont deux versions du même signal à l'échelle 1, fait intervenir une autre notion: celle de résolution.

2.2. Changement de résolution

Examinons ce qui se passe lors d'un "aller-retour" à l'échelle 1/2. Le signal $y=\mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}'x$ est clairement à l'échelle 1, tout comme x. Cependant, une partie de l'information sur x est perdue à cause du sous-échantillonnage. Intuitivement, puisque y contient moins d'information, il est à plus faible résolution que x. De façon plus formelle, on dira qu'un signal y est à *résolution* 2^{-j} s'il est caractérisé par un échantillon pour 2^j échantillons du signal originel x (qui lui, est donc à résolution 1). Dans notre exemple, $y=\mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}'x$ est donc à résolution 1/2 (l'opérateur $\mathbf{G}\uparrow$, malgré le filtre passe-bas, ne provoque aucune perte d'information, car généralement injectif [5].

L'opérateur $\mathbf{G}\uparrow$ double donc l'échelle sans changer la résolution. Par contre, le passage $x\rightarrow\downarrow\mathbf{G}'x$ réduit de moitié à la fois l'échelle et la résolution. Par combinaisons arbitraires de ces deux opérateurs sur x, on arrive à une pléthore de versions à différentes échelles et résolutions. Pour l'exemple ci-dessus, l'opérateur

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}' \qquad (2)$$

est le type même d'approximation à la résolution 1/2 puisque appliqué à un signal à échelle et résolution égales, il divise la résolution par 2 sans changer l'échelle.

Afin que les deux paramètres d'échelle et de résolution déterminent une version du signal x de façon unique, il nous faut imposer des conditions sur les opérateurs (1). C'est ce que nous allons faire maintenant.

2.3. Biorthogonalité

Partons de l'idée suivante: l'opérateur (2) approximant à résolution 1/2, il doit laisser invariant le signal $\mathbf{A}x$ qui est lui-même à résolution 1/2. En d'autres termes, $\mathbf{A}$ est un projecteur:

$$\mathbf{A}^2x = \mathbf{A}x \qquad (3a)$$

D'après (2), cette condition supplémentaire est satisfaite si

$$\downarrow\mathbf{G}'\mathbf{G}\uparrow = \mathbf{I} \quad \text{(identité)} \qquad (3b)$$

et on peut montrer grâce aux hypothèses précédentes que la réciproque est vraie [4, 11]. L'équation (3b) nous permet maintenant de montrer qu'une combinaison quelconque d'opérateurs (1) appliquée à x se réécrit sous la forme $(\mathbf{G}\uparrow)^i(\downarrow\mathbf{G}')^j x$ qui est donc l'unique version de x à l'échelle 2^{i-j} et à la résolution 2^{-j}. La réécriture de (3b) en fonction des séquences fait par ailleurs apparaître la notion de *biorthogonalité*:

$$\langle g_{n-2k} \mid \hat{g}_{n-2l}\rangle = \sum_n g_{n-2k}\ \hat{g}^*_{n-2l} = 1 \text{ si } k=l,\ 0 \text{ sinon.} \qquad (3c)$$

où $\hat{g}_n = (g'_{-n})^*$: le produit scalaire des séquences g_{n-2k} et $\hat{g}_{n-2l}$ est nul dès que $k\neq l$. La nouvelle notation, $\hat{g}_n = (g'_{-n})^*$, agaçante mais nécessaire pour la suite, est due au fait que $\downarrow\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}\uparrow$ sont transposés Hermitiens l'un de l'autre lorsque $g_n = \hat{g}_n$ [3].

En résumé, la biorthogonalité (3c), qui semble une condition supplémentaire *a priori*, découle en fait de l'unicité des versions "multi-échelle" et "multi-résolution" d'un signal. Elle devrait donc être satisfaite dans tout système cohérent d'analyse multirésolution.

3. DECOMPOSITION MULTIRESOLUTION

3.1. Composantes résiduelles

L'idée fondamentale des schémas de décomposition multi-résolution est simple [1-6, 9]: puisqu'une version d'un signal à une résolution donnée contient toute l'information nécessaire pour retrouver les versions aux résolutions inférieures, on stocke seulement les différences. On considère donc des *composantes résiduelles* à la résolution 2^{-j} qui sont les différences des versions du signal aux résolutions 2^{-j+1} et 2^{-j}, et ceci pour une échelle fixe arbitraire. Ainsi, par addition successive des composantes résiduelles multiresolution, on peut reconstruire parfaitement le signal de départ à partir d'une version basse résolution.

Une *transformée pyramidale "Laplacienne"* [6], par exemple, est l'application directe de ce principe: elle décompose un signal x en une "pyramide" de composantes résiduelles à l'échelle 2^{-j+1} et à résolution 2^{-j}, pour $j=1, 2, ..., J$, plus une version de x basse résolution 2^{-J} à l'échelle 2^{-J}.

3.2. Bancs de filtres à reconstruction parfaite

La version du signal x à l'échelle 1 et résolution 1/2, est, comme nous l'avions vu, $y = \mathbf{A}x$ où $\mathbf{A}$ est défini par (2). La composante résiduelle à l'échelle 1 et résolution 1/2 est donc:

$$x - \mathbf{A}x = x - \mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}'x \qquad (4)$$

Elle représente la différence d'information entre x et sa réduite à l'échelle moitié $\downarrow\mathbf{G}'x$. Cependant, à la différence de $\downarrow\mathbf{G}'x$, elle est sur-échantillonnée par rapport à sa résolution. Une transformée pyramidale, qui représente x par la donnée de $\downarrow\mathbf{G}'x$ et de $x-\mathbf{A}x$, augmente donc le taux d'échantillonnage de 50% [9]. Ce manque d'économie est un inconvénient potentiel dans des

applications de codage en compression. Pour avoir autant de points d'entrée que de points de sortie après transformation, on a besoin de représenter la composante résiduelle (4) à échelle et résolution égales, donc avec moitié moins d'échantillons.

On définit donc de nouveaux opérateurs $\mathbf{H}\uparrow$ et $\downarrow\mathbf{H}'$ à partir des filtres passe-haut $\{h_n\}$ et $\{h'_n\}$ de la même façon qu'en (1). L'opérateur $\downarrow\mathbf{H}'$ ramène (4) à échelle et résolution 1/2, tandis que $\mathbf{H}\uparrow$ permet de revenir à l'échelle 1. Ce qui a été fait pour les versions à différentes échelles pêut se refaire pour les composantes résiduelles, et on impose, de la même façon qu'en (3), la biorthogonalité

$$\downarrow\mathbf{H}'\mathbf{H}\uparrow = \mathbf{I} \qquad (5a)$$

On peut montrer [5] qu'alors (3b), (5a) est équivalent à

$$x = \mathbf{G}\uparrow\downarrow\mathbf{G}'x + \mathbf{H}\uparrow\downarrow\mathbf{H}'x, \qquad (5b)$$

ce qui montre que le signal résiduel à échelle et résolution 1/2 est exactement $\downarrow\mathbf{H}'x$.

En fait, on reconnait dans (5b) la condition de reconstruction parfaite d'un *banc de filtres* à deux sous-bandes décrit à la Fig. 1 (a). Les contraintes sur $\{g_n\}$, $\{g'_n\}$, $\{h_n\}$, $\{h'_n\}$ vérifiant (5b) sont bien connues dans la littérature des bancs de filtres [7-9]. Dans le cas de filtres RIF, les filtres passe-haut sont déterminés à partir des filtres passe-bas par modulation par $(-1)^n$ et inversion de l'ordre des échantillons [4, 9].

C'est donc grâce à la biorthogonalité (3b), (5a) qu'on peut disposer d'une transformée qui représente un signal x sur le même nombre d'échantillons par deux composantes à échelles et résolutions 1/2: l'une passe-bas: $\downarrow\mathbf{G}'x$, l'autre résiduelle (passe-haut): $\downarrow\mathbf{H}'x$. Là encore la reconstruction s'opère en sommant les deux composantes ramenées à l'échelle 1 par l'action de $\mathbf{G}\uparrow$ et $\mathbf{H}\uparrow$, respectivement.

3.3. La Transformée en Ondelettes Discrètes (TOD)

Pour obtenir un schéma de décomposition multirésolution complet à partir du banc de filtres à deux bandes ci-dessus, il suffit de l'itérer J fois sur la branche passe-bas [3-5, 11] (cf. Fig. 1). La transformée obtenue, appelée *Transformée en Ondelettes Discrètes* (TOD), décompose x en J composantes résiduelles à l'échelle et résolution 2^{-j}, pour j=1, ..., J, plus une version de x basse résolution à échelle et résolution 2^{-J}. Elle est donc équivalente, du point de vue calculatoire, à un banc de filtres d'analyse en J octaves, et la transformée inverse reconstruit le signal à l'aide du banc de filtres de synthèse correspondant.

Afin de justifier son nom, on va réécrire la TOD de la façon suivante [5]: Définissions les "*séquences d'échelle*" g^j, $\tilde{g}^j$ et les "*ondelettes*" h^j, $\tilde{h}^j$ de synthèse.et d'analyse, respectivement, par $g^j = (\mathbf{G}\uparrow)^{j-1}g$, $\tilde{g}^j = (\tilde{\mathbf{G}}\uparrow)^{j-1}\tilde{g}$, $h^j = (\mathbf{G}\uparrow)^{j-1}h$, et $\tilde{h}^j = (\tilde{\mathbf{G}}\uparrow)^{j-1}\tilde{h}$. Ceux sont les versions des filtres du banc de filtres de *synthèse* g, h et d'analyse $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ "dilatées d'un facteur 2^j. On a utilisé, comme en (3c), la notation: $\tilde{g}_n = (g'_{-n})^*$, $\tilde{h}_n = (h'_{-n})^*$, et $\tilde{\mathbf{G}}\uparrow$ est l'opérateur de doublement d'échelle associé à $\tilde{g}$.

Avec ces définitions, on voit que la TOD décompose le signal x_n en différentes composantes ("coefficients en ondelettes") qui sont [4, 9]

$$c_{j,k} = \langle x_n \mid \tilde{h}^j_{n-2^jk} \rangle, \; j=1, \ldots, J, \qquad (6a)$$

plus un produit scalaire avec des séquences d'échelle translatées correspondant à une version de x basse résolution:

$$b_{J,k} = \langle x_n \mid \tilde{g}^J_{n-2^Jk} \rangle, \qquad (6b)$$

Le formule de reconstruction (TOD inverse) utilise les ondelettes de synthèse:

$$x_n = \sum_{j=1}^{J} \sum_k c_{j,k}\, h^j_{n-2^jk} + \sum_k b_{J,k}\, g^J_{n-2^Jk} \qquad (7)$$

La TOD effectue donc une décomposition du signal x sur une *base* de séquences discrètes $\{h^j_{n-2^jk}, j=1, \ldots, J,\ g^J_{n-2^Jk}\}$.

3.4. Ondelettes orthogonales et biorthogonales

Nous avons vu que la condition de reconstruction parfaite se réduisait à celle de biorthogonalité (3c), (5a). En fait elle implique des conditions de biorthogonalité plus générales sur les fonctions de base (ondelettes et séquences d'échelle translatées) qui interviennent dans (6)-(7). On a par exemple [4, 9]:

$$\langle h^j_{n-2^jk} \mid \tilde{h}^i_{n-2^il} \rangle = 1 \text{ si } k=l \text{ et } i=j, \text{ 0 sinon.} \qquad (8)$$

Dans le cas ou les fonctions de base d'analyse et de synthèse coïncident, c'est à dire si les filtres d'analyse se déduisent des filtres de synthèse par $g'_n = (g_{-n})^*$ et $h'_n = (h_{-n})^*$, la TOD décompose le signal x sur une *base orthonormale d'ondelettes.*

4. COMPARAISON AVEC LES DECOMPOSITIONS EN SERIE D'ONDELETTES CONTINUES

4.1. Un parallélisme total

Le formalisme des paragraphes 3.3 et 3.4 duplique en temps discret celui des décompositions de signaux analogiques en bases d'ondelettes à temps continu [1-4]. Le parallélisme est si fort qu'on peut quasiment réécrire les même formules (6)-(8) dans le cas "temps continu", avec des produits scalaires "temps-continu", et des opérateurs de changement d'échelle qui sont de simples dilatations. Ainsi les ondelettes de synthèse à temps continu sont

$$\psi^j(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t) \qquad (9)$$

On définit de même celle d'analyse $\tilde{\psi}^j(t)$, et les fonctions d'échelle correpondantes $\phi^j(t)$ et $\tilde{\phi}^j(t)$ [4]. Par analogie avec les différentes transformées de Fourier, nous appelerons "*décomposition en série d'Ondelettes*" la transformée en ondelettes obtenue dans le cas temps-continu, dont l'analogue discret est la TOD.

Ainsi, les deux modèles "temps-discret" et "temps-continu" présentent les mêmes propriétés mathématiques. En fait, ils sont totalement imbriqués puisque, d'une part, de nombreuses bases d'ondelettes à temps continu ont été construites à partir de leur homologues discrètes [3,4,9], et, d'autre part, les coefficients des séries d'ondelettes continues sont calculables à l'aide d'une TOD [11] (voir section 4.3).

Même la propriété de *régularité*, qui semble contradictoire sur les signaux échantillonnés, se traduit fort bien en temps discret d'une façon analogue et équivalente au temps continu [5,10].

4.2. Approximation du cas continu par la TOD

Le problème de l'implantation des séries d'ondelettes continues à l'aide de la TOD est l'occasion de préciser davantage les liens profonds existants entre les deux appoches temps discret et temps continu. Ces liens ont été également précisés en détail par Shensa [11]. Nous décrivons ici le calcul des coefficients en ondelettes. L'algorithme de reconstruction se dérive de façon analogue par une TOD inverse.

En formalisant la discrétisation du signal analogique $x(t)$ et des ondelettes continues par des équations d'interpolation

$$x(t) = \sum_n x_n \, \eta(t-n) \qquad (10a)$$

$$\widehat{\psi}^j(t) = \sum_n h^j_n \, \widehat{\phi}(t-n) \qquad (10b)$$

on obtient [11, 12] que les coefficients des séries d'ondelettes sont calculés exactement par une TOD appliqué au signal discret $\{x_n\}$, *préfiltré* par un filtre de réponse impulsionnelle:

$$f_n = \int \eta(t) \, \widehat{\phi}^*(t-n) \, dt$$

Dans le cas où les ondelettes sont orthonormales et où $\eta(t) = \widehat{\phi}(t)$, on retrouve l'algorithme de Mallat [1, 11] qui ne nécessite plus de préfiltrage. Plus généralement, en réécrivant les conditions (10) pour des ondelettes $\widehat{\psi}(t)$ quelconques données *a priori*, le calul par TOD fournit les coefficients des séries d'ondelettes avec une grande précision si on peut trouver une fonction d'échelle $\widehat{\phi}(t)$ et une filtre interpolateur $\{\widehat{g}_n\}$ satisfaisant

$$\widehat{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_n \widehat{g}_n \, \widehat{\phi}(2t-n) \qquad (11a)$$

et les coefficients du filtre $\{\widehat{h}_n\}$ tels que la combinaison linéaire

$$\sum_n \widehat{h}_n \, \widehat{\phi}(2t-n) \qquad (11b)$$

approxime au mieux $x(t)$ au sens de l'énergie. En pratique, on réalise facilement (11) par une approximation spline où $\widehat{\phi}(t)$ est un "B-spline".

5. TRANSFORMEE EN ONDELETTES RAPIDE (TOR)

En réécrivant le banc de filtres de façon à faire apparaître de "vrais" filtres (non suivis par un sous-échantillonnage, cf. Fig. 1(b)), on peut appliquer des techniques de filtrage rapide classiques au calul d'une TOD (et donc aussi d'une décomposition en série d'ondelettes continues).

Les algorithmes obtenus ont, comme pour le banc de filtres initial, l'avantage de présenter une structure de calculs régulière puisqu'ils se réduisent en effet à l'application répétée de cellules de base identiques (bien qu'à des taux d'échantillonnage décroissants), et sont donc facilement implantables sur ordinateur.

L'application de techniques basées sur la TFR est plus efficace pour de grandes longueurs de filtres L: la complexité arithmétique est réduite d'un facteur $L/(2 \log L)$ [12]. Pour des petites longueurs on préfère l'utilisation d'algorithmes de filtrage rapide RIF développés en [13]. Quelques résultats sont présentés dans le tableau suivant.

COMPLEXITE ARITHMETIQUE DE LA T.O.R.

Nombre de multiplications M *et additions* A *par coefficient en ondelette calculé pour différentes longueurs de filtres L et un grand nombre d'octaves. Pour J octaves, multiplier ces nombres par* $(1-2^{-J})$.

	Banc de Filtres Initial		+ TFR [12]		+ Filtrage Rapide RIF [12,13]	
L	M	A	M	A	M	A
4	8	6	8	18,66	6	10
8	16	14	10,46	28,30	9	7
12	24	22	12,36	33,46	12	24
16	32	30	13,12	36,48	18	26
32	64	62	15,84	44,74	36	44

6. CONCLUSION

Un des objectifs de cet article a été de montrer que la seule capacité de la transformée en ondelettes d'opérer une analyse multirésolution à l'aide de bases de fonctions régulières, orthonormales ou biorthonormales, ne doit pas être une raison suffisante pour préférer le modèle temps continu au modèle temps discret, parce que les deux modèles présentent les mêmes propriétés mathématiques. Cependant, la vision des choses en temps discret est certainement plus adaptée aux situations concrètes en traitement numérique du signal; en traitement d'images, par exemple, on imagine plus difficilement une image comme des coefficients d'une fonction bidimensionnelle $f(x, y)$ élément de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ dans une certaine base (liée à $\phi(x)$) [1] que comme un tableau de 512x512 pixels!

Les algorithmes obtenus ici présentent une structure calculatoire régulière. Différentes techniques de reduction de charge de calcul sont applicables sur les cellules élémentaires de l'algorithme. Les complexités algorithmiques (multiplications et additions) qui en résultent sont les plus faibles connues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation," *IEEE Trans. PAMI*, Vol.11, No.7, pp.674-693, July 1989.

[2] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Herrmann, 1990.

[3] I. Daubechies, "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets," *Comm. in Pure and Applied Math.*, Vol.41, No.7, pp.909-996, 1988.

[4] A. Cohen, I. Daubechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets," *Comm. Pure and Applied Math.*, à paraître.

[5] O. Rioul, "A Discrete-Time Multiresolution Theory that Unifies Octave-Band Filter Banks, Pyramid and Wavelet Transforms," soumis *IEEE Trans. Signal Proc.*

[6] P.J.Burt and E.H.Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code," *IEEE Trans. Com.*, Vol. 31, No.4, April 1983, pp.532-540.

[7] M.J.T.Smith and T.P.Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, Vol. 34, pp. 434-441, June 1986.

[8] M.Vetterli, "Filter Banks Allowing Perfect Reconstruction," Signal Processing, Vol.10, No.3, April 1986, pp.219-244.

[9] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks: relationships and new results," Proc. IEEE ICASSP, pp.1723-1726, Albequerque NM, USA, April 1990.

[10] O. Rioul, "Dyadic Up-Scaling Schemes: Simple Criteria for Regularity," soumis à *SIAM J. Math. Anal.*

[11] M.J. Shensa, "The Discrete Wavelet Transform: Wedding the à Trous and Mallat Algorithms," soumis *IEEE Trans. Signal Proc.*

[12] O. Rioul et P. Duhamel, "Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms," soumis *IEEE Trans. Info. Theory*, Special issue on Wavelets, Jan. 1992.

[13] Z.J. Mou et P. Duhamel, "Short-Length FIR Filters and Their Use in Fast Nonrecursive Filtering," *IEEE Trans. Signal. Proc.*, Juin 1991.