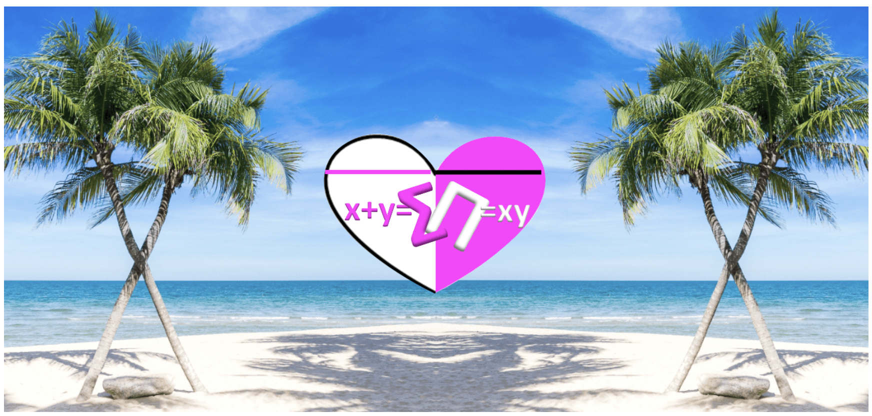
Somme et produit, couple star

Karim Zayana, Victor Rabiet

Somme et produit, couple star

Karim Zayana[1,2] et Victor Rabiet[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



En classe de première et à titre d'approfondissement [2], on a coutume de traiter par le second degré le système à deux inconnues x et y dont la somme Σ et le produit Π sont donnés. Soit :

$$\begin{cases} x+y=\Sigma \\ xy=\Pi \end{cases} \tag{1}$$

Quand Π est non nul[1], on remonte ainsi (1) en substituant $\frac{\Pi}{x}$ à y. Ceci mène à l'équation en X satisfaite par x (mais aussi par y) :

$$X^2-\Sigma X+\Pi=0. \tag{2}$$

Puis on résout habituellement en passant par le discriminant $\Delta=\Sigma^2-4\Pi$.

Il est aussi possible, et fructueux, d'adopter une autre logique. Si la somme Σ de x et de y est connue, leur moyenne $\frac{\Sigma}{2}$ l'est aussi et se trouve en leur milieu. Dès lors est-il naturel d'écrire

$$x=\frac{\Sigma}{2}-u \text{ et } y=\frac{\Sigma}{2}+u \tag{3}$$

1. Ceci assure la non nullité de x et de y.

où u désigne une variable auxiliaire. Si bien que

$$xy = (\frac{\Sigma}{2})^2 - u^2 = \frac{\Sigma^2}{4} - u^2 = \Pi \tag{4}$$

et donc

$$u^2 = \frac{1}{4}(\Sigma^2 - 4\Pi) = \frac{\Delta}{4}, \tag{5}$$

qui renoue avec la traditionnelle discussion sur le signe de Δ, d'où les valeurs potentielles de u, et consécutivement du couple (x, y) .

Cette méthode ne requiert aucune connaissance préalable et tiendrait du miracle sans son interprétation géométrique. Sous réserve que x et y soient positifs, identifions-les aux côtés d'un rectangle, figure 1. Ainsi, $x + y = \Sigma$ mesure un demi-périmètre et $xy = \Pi$, une aire.

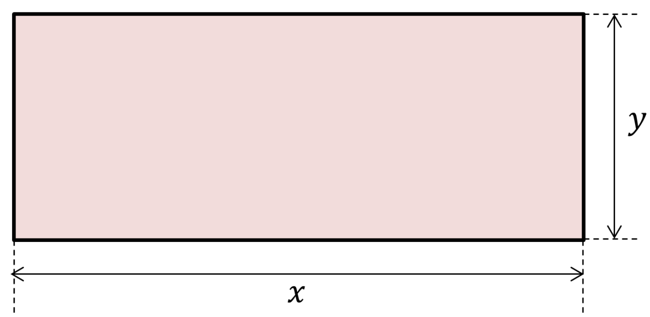


FIGURE 1 – Un rectangle de côtés x et y, avec ici $x \geq y$ (≥ 0).

Tout d'abord, la relation (4) entre Σ, Π et u prend tout son sens, comme l'illustre la figure 2.

Puis on anticipe l'impasse à laquelle peut conduire l'équation (5). Car on devine qu'à périmètre fixé, l'aire sera matériellement contrainte. Donc qu'au delà d'une certaine borne, la valeur de Π ne sera plus conciliable avec celle de Σ. De fait, assez grossièrement,

$$x + y = \Sigma \Rightarrow x, y \leq \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \Sigma^2,$$

et plus précisément, à l'aide de (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \frac{\Sigma^2}{4}.$$

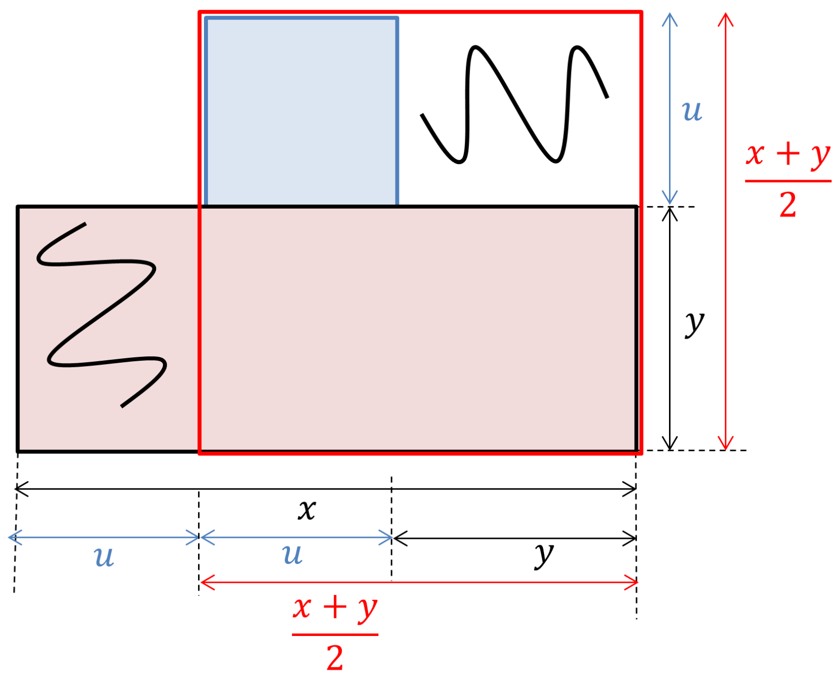


Figure 2 – Le grand carré rouge se décompose en un petit carré bleu et deux petits rectangles. En ré-agençant les deux petits rectangles, on reconstitue le grand rectangle mauve. En passant aux aires, on retrouve : $(\frac{x+y}{2})^2 = u^2 + xy$, soit $\frac{\Sigma^2}{4} = u^2 + \Pi$.

À l'inverse, on ne s'attend pas à ce qu'une aire fixée limite le périmètre : écraser le rectangle tout en l'étirant ouvre le jeu.

Enfin, on comprend qu'à périmètre fixé le carré réalise, parmi les rectangles, la plus grande aire et que de manière duale, à aire fixée, le même carré réalise le plus petit périmètre. Le fait est, toujours via (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy \leq \frac{\Sigma^2}{4}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$. Et

$$xy = \Pi \Rightarrow \frac{\Sigma^2}{4} \geq \Pi \Rightarrow \Sigma \geq 2\sqrt{\Pi}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$.

Résumons :

$\Pi.\Sigma.$ I love you [1].

Karim Zayana est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), et Victor Rabiet est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Sandrine Picard, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Grenoble pour sa relecture très attentive et ses suggestions d'amélioration du texte.

Références

[1] The Beatles. « P.S. I love you ». In : *Please Please me* (1963).

[2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm`.