M A T R I X Transpositions. Spécial Prod : de l'autre côté du miroir

Karim Zayana, Ivan Boyer, Marc-Aurèle Massard, Victor Rabiet

M A T R I X Transpositions.
Spécial Prod : de l'autre côté du miroir

Karim Zayana[1,2], Ivan Boyer[1], Marc-Aurèle Massard[1] et Victor Rabiet[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris

Il faut un tableau pour faire des mathématiques car les mathématiques sont faites d'images et de dessins. Mais quand leur objet est lui-même un tableau, en l'occurrence une (ou plusieurs) matrice(s), il peut devenir nécessaire d'animer ce qui leur sert de support. C'est grâce à cette liberté supplémentaire que nous illustrerons sans grand calcul la propriété ci-dessous.

Proposition

La transposée d'un produit de matrices est le produit de leurs transposées, mais – attention – prises dans l'ordre inverse. Ainsi,

$$(AB)^T = B^T A^T$$

et par extension, pour tout entier $k \geq 2$

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T A_{k-1}^T \cdots A_1^T$$

moyennant la compatibilité des formats des matrices A_1, A_2,..., A_k.

Bien connues des étudiants des classes préparatoires [2] et des candidats au CAPES [3], ses démonstrations « classiques » reposent, au choix, sur une manipulation de sommes assez simple mais austère [1], ou sur des arguments de dualité relativement pointus [4].

Remarquons plutôt qu'on symétrise une matrice carrée en la faisant tourner sur elle-même par rapport à sa diagonale. Et plus généralement qu'on symétrise une matrice en la faisant tourner par rapport à n'importe quel axe incliné de $45°$ (vers le bas). L'effet obtenu après cette pirouette est bien d'intervertir lignes et colonnes, on le constaterait aisément en réalisant l'expérience avec un papier calque.

Examinons maintenant le coefficient (i, j) du produit AB. Il résulte du « croisement » des ligne i de A et colonne j de B. Faisons pivoter l'ensemble, qui va décrire une vrille. La matrice A, en bas à gauche, glisse en haut à droite tout en se transposant. La matrice B, en haut à droite, glisse en bas à gauche tout en se transposant. Le produit AB au centre demeure au centre tout en se transposant. Il se passe comme si son coefficient (j, i) (qui s'échange avec le coefficient (i, j) d'avant) résultait du « croisement » de la ligne j de B^T (l'ancienne colonne j de B, désormais couchée) et de la colonne i de A^T (l'ancienne ligne i de A, désormais redressée) car la multiplication entre les réels qu'on apparie est commutative. Digne d'une saga hollywoodienne [5], l'animation Javascript / WebGL ci-après (sur le site CultureMath), conçue pour la circonstance, est des plus convaincantes. Enjoy...

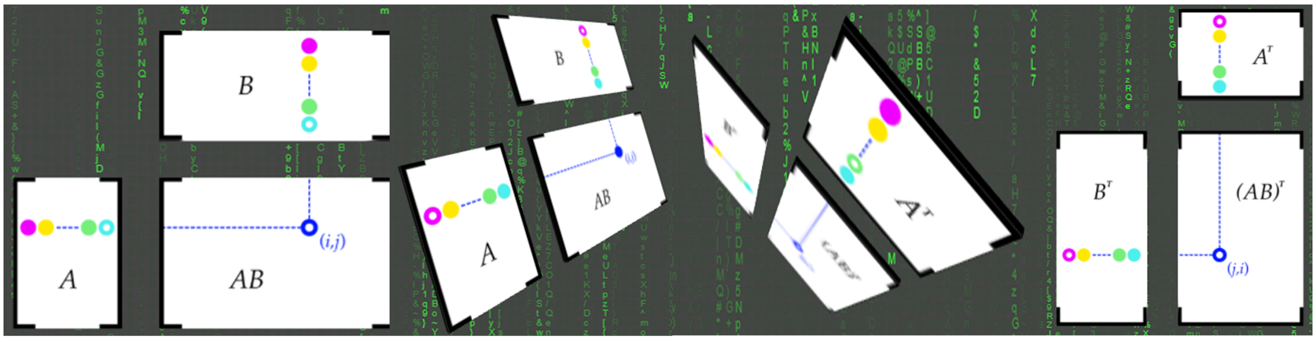

FIGURE 1 – Le produit matriciel AB décrit une vrille dans les airs. Et l'on voit que $(AB)^T = B^T A^T$. Animation complète sur le site CultureMath (500 lignes de code tout de même !)

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) ; Ivan BOYER est professeur de mathématiques en classe préparatoire au lycée Saint-Louis (Paris) ; Marc-Aurèle MASSARD est professeur de mathématiques en classe préparatoire au lycée Le Parc (Lyon) et Victor RABIET est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Richard BREHERET, inspecteur d'académie – inspecteur pédagogique régional de mathématiques dans l'académie de Créteil pour sa relecture très attentive du texte.

Références

[1] Jean-Marie MONIER. *Algèbre 1 – tome 5*. Dunod, 1996.

[2] « Programmes des CPGE voies ECG, ECT, PCSI, PTSI, MPSI, MP2I ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 11 février 2021* (2021). URL : `https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=40147`.

[3] « Programmes du CAPES externe de mathématiques ». In : *Journal officiel n°25 du 29 janvier 2021* (2021). URL : `https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000043075486`.

[4] Edmond Ramis, Claude Deschamps et Jacques Odoux. *Cours de mathématiques spéciales – 1, Algèbre*. Masson, 1990.

[5] Lana Wachowski. *Matrix Resurrections*. Warner Bros, 2021.