



**HAL**  
open science

## Une multitude irrationnelle

Karim Zayana, Victor Rabiet

► **To cite this version:**

| Karim Zayana, Victor Rabiet. Une multitude irrationnelle. 2022. hal-03647693

**HAL Id: hal-03647693**

**<https://hal.telecom-paris.fr/hal-03647693>**

Submitted on 20 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

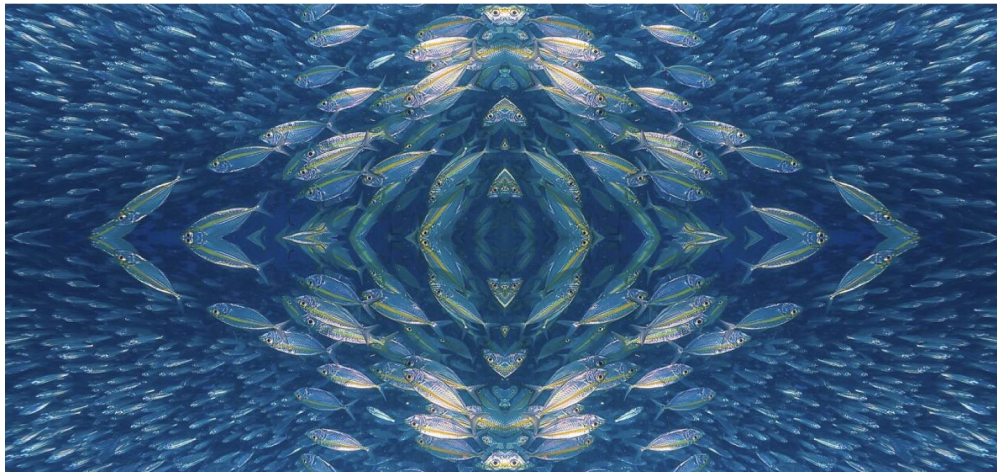
# Une multitude irrationnelle

Karim ZAYANA<sup>1,2</sup> et Victor RABIET<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Ministère de l'Éducation nationale, Paris

<sup>2</sup> LTCl, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

<sup>3</sup> DMA, École normale supérieure, Paris



Ce sont les Pythagoriciens<sup>1</sup> qui, les premiers, auraient pressenti l'existence de nombres « incommensurables ». C'est ainsi que  $\sqrt{2}$ , pour ne parler que de lui, ne saurait jamais être ce qu'un entier peut être à un autre. Cette découverte ne fut pas sans provoquer d'âpres controverses à l'époque, dans l'Antiquité. Refusant d'entendre raison, plusieurs philosophes rejetèrent vigoureusement l'idée qu'une quantité ne puisse être rationnelle. Il faut donc lire dans le mot « irrationnel » deux sens : la négation d'un ratio, tout autant que ce qui échappe au raisonnable.

Après cette mise en bouche historique, revisitons ici les stratégies conduisant à l'irrationalité<sup>2</sup> de  $\sqrt{2}$ , et inspirons-nous en pour établir celle d'une multitude d'autres nombres.

---

1. École de PYTHAGORE ; communauté de penseurs du VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C.

2. Soulevons à cet endroit une difficulté orthographique puisqu'on écrit « irrationnel » avec deux « n », « irrationalité » avec un seul... tandis que « proportionnel » et « proportionnalité » ont tous deux leur comptant de « n ».

# 1 La racine carrée de 2

Au collège, c'est après avoir étudié le théorème de Pythagore puis construit à la règle et au compas  $\sqrt{2}$ , que l'élève peut découvrir l'idée d'incommensurabilité et, ce faisant, rédiger sa première démonstration par l'absurde. En troisième, on opte en général pour une preuve reposant sur des arguments arithmétiques [4]. Cette même preuve est volontiers réinvestie au lycée, en seconde, et perfectionnée en terminale dans l'option mathématiques expertes [2, 3]. Une autre voie existe cependant ; nous en discuterons les avantages dans cette partie et la suivante.

**La méthode classique, dite arithmétique, et ses variantes.** La démarche est la suivante : on nie le résultat, en supposant que  $\sqrt{2}$  est rationnel et s'écrit donc sous la forme du quotient irréductible de deux entiers naturels, soit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \wedge b = 1, \quad (1)$$

puis on élève les deux membres de (1) au carré :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \quad (2)$$

Ensuite, selon son degré de connaissance et de maîtrise, on peut emprunter plusieurs voies [1] :

— on reformule (2) en

$$2b^2 = a^2,$$

on discute de la parité d'un carré, on conclut à une impasse à savoir que 2 diviserait  $a$  et  $b$ , donc que le représentant  $\frac{a}{b}$  ne serait pas réduit. C'est la technique la plus usuelle ;

— on reformule ici encore (2) en

$$2b^2 = a^2,$$

on discute du chiffre des unités d'un carré, on conclut à une impasse à savoir que 5 diviserait  $a$  et  $b$ , donc que le représentant  $\frac{a}{b}$  ne serait pas réduit. Cette technique est d'une difficulté comparable à la précédente ;

— on récrit (2) sous la forme

$$\frac{2}{1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Les deux fractions de part et d'autre de cette égalité sont irréductibles (pour celle de droite, c'est une conséquence du théorème de Bezout<sup>3</sup>). Comme, à des signes près, il n'y a qu'un représentant irréductible d'un rationnel donné (c'est une conséquence du lemme de Gauss<sup>4</sup>), il vient  $2 = a^2$  et  $1 = b^2$ . Dès lors  $\sqrt{2}$  est entier, c'est impossible. C'est cette approche «éclair» qu'on peut privilégier en classe de terminale pour son efficacité et son formalisme.

**Une solution sans arithmétique.** Signalons maintenant un autre cheminement possible fondé, non pas sur de l'arithmétique, mais sur des manipulations d'inégalités. On commence à l'identique, par l'absurde, en supposant que  $\sqrt{2}$  est rationnel. Le radical s'identifie donc à une fraction, quotient de deux naturels  $a$  et  $b$  :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Nous n'allons pas chercher à réduire cette fraction, mais nous allons considérer l'ensemble  $\mathcal{E}$  de tous les entiers  $i$  strictement positifs tel que  $i \times \sqrt{2}$  soit aussi un entier :

$$\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}, i \neq 0, i \times \sqrt{2} \in \mathbb{N}\}.$$

Autrement dit,  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des dénominateurs positifs des fractions rationnelles représentant  $\sqrt{2}$ . Cet ensemble d'entiers contient d'ores et déjà l'élément  $b$ . Isolons son plus petit élément, noté  $q = \min(\mathcal{E})$ , et posons naturellement  $p = q \times \sqrt{2}$ . Remarquons alors que

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\sqrt{2}$  par le rationnel  $\frac{p}{q}$  dans le second membre ci-dessus, il vient

$$\sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Numérateur et dénominateur sont des entiers positifs par construction. De plus,

$$0 < p - q < q$$

---

3. Ce fait sera établi en annexe.

4. Ce fait sera aussi établi en annexe.

puisque

$$1 < \frac{p}{q} = \sqrt{2} < 2.$$

Ainsi,  $p - q$  est un élément de  $\mathcal{E}$  qui « fait mieux » que  $q$  en termes de minimalité. C'est absurde.

## 2 Les racines carrées de $n$ , $n \in \mathbb{N}$ , $n$ non carré parfait

Transposons ce qui précède au cas de  $\sqrt{n}$ , quand  $n$  n'est pas un carré parfait, afin d'obtenir une ribambelle de nouveaux nombres irrationnels. La méthode utilisant l'arithmétique s'y prête encore à merveille... en classe de terminale seulement car elle n'admet pas de version élémentaire. À cet effet, posons par l'absurde,

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \wedge b = 1.$$

Un élévation au carré fournit

$$n = \frac{a^2}{b^2}.$$

Les deux fractions en présence étant irréductibles et constituées d'entités positives, l'argument d'unicité impose  $a^2 = n$  et  $b^2 = 1$ . Donc  $n$  serait un carré parfait, c'est impossible.

Puis donnons la version basée sur les inégalités, qui a l'intérêt de ne solliciter qu'un bagage mathématique minimal et peut ainsi être traitée relativement tôt dans la scolarité. On suppose donc que  $\sqrt{n}$  est rationnel. À l'image du raisonnement tenu pour  $\sqrt{2}$ , introduisons l'ensemble  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}, i \neq 0, i \times \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}.$$

Autrement dit,  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des dénominateurs positifs des fractions rationnelles représentant  $\sqrt{n}$ . Cet ensemble n'est pas vide par hypothèse. Notons  $q = \min(\mathcal{E})$  sont plus petit élément, et l'entier  $p = q \times \sqrt{n}$ . Comme  $n$  n'est pas un carré parfait,  $\sqrt{n}$  s'intercale strictement entre deux entiers consécutifs, notés  $k$  et  $k + 1$  :

$$k < \sqrt{n} < k + 1$$

Observons dès lors que

$$\begin{aligned}\sqrt{n} &= \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n} - k}{\sqrt{n} - k} \\ &= \frac{n - k\sqrt{n}}{\sqrt{n} - k}\end{aligned}$$

En remplaçant  $\sqrt{n}$  par le rationnel  $\frac{p}{q}$  dans le second membre ci-dessus, il vient

$$\sqrt{n} = \frac{nq - kp}{p - kq}.$$

Numérateur et dénominateur sont des entiers positifs par construction. De plus,

$$0 < p - kq < q$$

puisque

$$k < \frac{p}{q} < k + 1.$$

Donc  $p - kq$  appartient à  $\mathcal{E}$  tout en « faisant mieux » que  $q$ . D'où l'absurdité.

Enfin, pour une définition et une construction géométrique de  $\sqrt{n}$ , on pourra consulter [5, 6].

## Annexe

Pour montrer l'unicité (à des signes près) du représentant irréductible d'un certain rationnel  $r$ , confrontons-en deux, notés  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a'}{b'}$ . Dans ces conditions,

$$ab' = a'b$$

Comme  $a$  divise  $a'b$  et que  $a \wedge b = 1$ ,  $a$  divise  $a'$  par le théorème de Gauss. Un échange des lettres assure également que  $a'$  divise  $a$ . Donc  $a = \pm a'$ . De même,  $b = \pm b'$ .

Pour montrer que  $a \wedge b = 1$  entraîne  $a \wedge b^2 = 1$  (et donc  $a^2 \wedge b^2 = 1$  par rebond puis inversion les rôles), on part d'une identité de Bezout associée au couple  $(a, b)$ , traditionnellement de la forme

$$am + bn = 1$$

où  $m$  et  $n$  sont des entiers relatifs. En élevant au carré, il vient

$$a(2mbn + am^2) + b^2n^2 = 1.$$

Nous avons mis en évidence des coefficients de Bezout convenables. Ainsi,  $a \wedge b^2 = 1$ .

## Remerciements

Les auteurs remercient Magali FAUCHON, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie d'Aix-Marseille pour sa relecture très fine du texte.

## Références

- [1] *Fiche Séance : irrationalité de  $\sqrt{2}$* . Académie de Créteil, 2019. URL : [http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/racine\\_de\\_2.pdf](http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/racine_de_2.pdf).
- [2] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special11/MENE1901631A.htm>.
- [3] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes de la classe de Terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921264A.htm>.
- [4] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : <https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4>.
- [5] Karim ZAYANA. « Nos racines ». In : *CultureMath* (2022). URL : <https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/nos-racines>.
- [6] Karim ZAYANA. « Pythagore, J'adore ». In : *Repères I.R.E.M* (2020).