HAL
open science

Sommes : géométriques = mirifiques ?

Karim Zayana, Victor Rabiet

To cite this version:

Karim Zayana, Victor Rabiet. Sommes : géométriques = mirifiques ?. 2022. hal-03682348

HAL Id: hal-03682348

https://telecom-paris.hal.science/hal-03682348

Submitted on 31 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sommes : géométriques = mirifiques ?

Karim ZAYANA[1,2] et Victor RABIET[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris

Les mathématiques financières font bon ménage avec les suites géométriques, [1]. Voilà pourquoi les programmes scolaires [2, 3] modélisent des situations, certes simplifiées, ayant trait à ce contexte. Après les avoir résumées, nous en élargirons le propos, en quête de l'une des nouvelles trouvailles marketing du moment : le bon d'achat réutilisable.

Lorsqu'on place une somme σ sur un livret pendant une certaine durée elle-même fractionnée en périodes, les intérêts, disons au taux constant de 1%, sont incorporés au capital pour l'augmenter progressivement et porter à leur tour intérêt [5]. Le capital enrichi devient $\sigma \cdot (1 + \frac{1}{100})$ à l'issue de le première période, puis $\sigma \cdot (1 + \frac{1}{100})^2$ à l'issue de la deuxième, etc. On peut raisonner sur un taux t, où $0 < t < 1$, au lieu de 1%. Après n périodes à fructifier, l'épargne s'élève à

$$\sigma \cdot (1 + t)^n.$$

Le procédé diverge ; il tend vers l'infini (c'est une bonne nouvelle).

Inversement, dépensons nos économies, représentant la somme σ, mais à la manière d'un enfant qui voudrait en prolonger indéfiniment l'usage. On achète

d'abord pour la moitié de ce qu'on possède, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite [6]. On peut raisonner sur des quantièmes q, où $0 < q < 1$, au lieu des moitiés. Après n périodes de ce rythme, on a donc fait pour

$$\sigma \cdot (q + q(1-q) + \cdots + q(1-q)^{n-1}) = \sigma \cdot (1 - (1-q)^n)$$

d'emplettes. Le procédé converge, qui plus est vers σ (on s'en serait douté).

Depuis quelques temps, les grandes surfaces ont mis au point une stratégie commerciale redoutable pour vous fidéliser. Vous consommez la somme σ et, reconnaissant, l'hypermarché vous offre un bon d'achat du dixième de la valeur : $\frac{\sigma}{10}$. En général, un client s'en tient là car l'opération est à durée limitée ; il gagne ainsi $\frac{\sigma}{10}$ sur son caddie. Mais il est théoriquement possible de recycler les $\frac{\sigma}{10}$ qui partiront à leur tour en cadeau, de $\frac{\sigma}{100}$ cette fois. Et ainsi de suite. Par exemple, avec une mise de σ et pour ce même prix, on peut successivement acquérir un luxueux frigidaire (réglé comptant au coût exact de σ), une armoire à cuillères (offerte mais au coût exact de $\frac{\sigma}{10}$), un cire-godasses (offert mais au coût exact de $\frac{\sigma}{100}$), ainsi que le lot de ratatine-ordures et coupe-friture (offert mais au coût exact et exceptionnel de $\frac{\sigma}{1\,000}$). Tout cela, donc, sans avoir déboursé un sou de plus de ses poches que le premier montant σ : on n'arrête pas le progrès [4] ! Plus généralement, en raisonnant sur des quantièmes q, où $0 < q < 1$, au lieu de dixièmes, le portefeuille σ d'origine se sera démultiplié comme des petits pains, équivalant, après n passages en caisse tout de même, la coquette somme de, devinez quoi Mesdames, Messieurs :

$$\sigma \cdot (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \sigma \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Mais halte aux bonimenteurs des temps modernes : le procédé converge (hélas), vers $\frac{\sigma}{1-q}$. Soit un gain net asymptotique pour le client de

$$\frac{\sigma}{1-q} - \sigma = \frac{q\sigma}{1-q}.$$

Si q =10%, cela fait à peu près 0,111...1 σ. Quoi, seulement ? Évidemment, si q =90%, cela ferait 9 σ mais... faut pas rêver !

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) et Victor RABIET est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Mahdia Aït Khelifa, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Reims pour sa relecture très attentive du texte.

Références

[1] Jean-Guy Degos et Jean-Yves Degos. *Premiers pas en mathématiques financières*. Ellipses, 2013.

[2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm`.

[3] « Programme de mathématiques de tronc commun de Première de la voie technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : `https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901630A.htm`.

[4] Boris Vian et Alain Goraguer. « La complainte du progrès ». In : *Philips* (1955).

[5] Karim Zayana et Khaled Chaouch. « Les cléfs du crédit ». In : *SES-ENS* (2020). URL : `https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/les-cles-du-credit`.

[6] Karim Zayana et Victor Rabiet. « Le paradoxe de Zéna ». In : *CultureMath* (2021). URL : `https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/le-paradoxe-de-zena`.